第 52 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 2
2013 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2013

# 局部凸空间的中点局部 $k$－一致凸性与中点局部 $k$－一致光滑性*

陈利国[1]，罗 成[2]，王 君[1]

（1. 内蒙古财经大学统计与数学学院，内蒙古 呼和浩特 010070；
2. 内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特 010021）

**摘 要**：引入局部凸空间的中点局部 $k$－一致凸性和中点局部 $k$－一致光滑性这一对对偶概念，它们既是 Banach 空间中点局部 $k$－一致凸性和中点局部 $k$－一致光滑性推广，又是局部凸空间中点局部一致凸性和中点局部一致光滑性的自然推广。讨论它们与其它 $k$－凸性（$k$－光滑性）之间的关系。

**关键词**：偶对；中点局部 $k$－一致凸性；中点局部 $k$－一致光滑性；弱中点局部 $k$－一致凸性；弱中点局部 $k$－一致光滑性

**中图分类号**：O177.3 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2013）02－0052－05

## Midpoint Locally $k$-Uniformly Convexity and Midpoint Locally $k$-Uniformly Smoothness in Locally Convex Spaces

*CHEN Liguo*[1]，*LUO Cheng*[2]，*WANG Jun*[1]

（1. School of Statistics and Mathematics，Inner Mongolia University of Finance and Economics，Hohhot 010070，China；
2. School of Mathematial Sciences，Inner Mongolia University，Hohhot 010021，China）

**Abstract**：The dual notions of midpoint locally $k$-uniformly convexity and midpoint locally $k$-uniformly smooth on Locally Convex Spaces are introduced，which are generalizations of both midpoint locally $k$-uniformly convexity（midpoint locally $k$-uniformly smoothness）in Banach spaces and midpoint locally uniformly convexity（midpoint locally uniformly smoothness）in locally convex spaces. The relationship between them and the other convexity（smoothness）are discussed.

**Key words**：dual；midpoint locally $k$-uniformly convexity；midpoint locally $k$-uniformly smoothness；weakly midpoint locally $k$-uniformly convexity；weakly midpoint locally $k$-uniformly smoothness

1977 年，文献［1］首次给出局部凸空间严格凸的定义，并开始对局部凸空间凸性的研究，之后，文献［2］进一步研究了严格凸的条件。1989 年，文献［3］中给出与文［2］中严格凸等价的定义，同时首次给出局部凸空间光滑性的定义，并建立严格凸性与光滑性的对偶关系，随后又在文献［4］中给出局部凸空间一致凸性的概念。2003 年，文献［5］利用 $X$ 上定义的一族半范数 $P$，重新给出偶对（$X$，$P$）的几种凸性和光滑性的定义，讨论了几种凸性（光滑性）之间的关系，并建立重要的对偶关系。2010 年，文献［6］将几种凸性和光滑性推广为 $k$－凸性和 $k$－光滑性[5]。但对于某些 $k$－凸性和 $k$－光滑性的研究却很少。主要原因是未能体现 $k$－凸性和 $k$－光滑性的重要对偶性质。2011 年，文献［7］给出局部凸空间的（弱）中点局部一致凸性，并证明它与（弱）中点局部一致光滑性是一对对偶概念[8]。本文进一步研究局部凸空间的 $k$－凸性和 $k$－光滑性，首先，引入局部

* **收稿日期**：2012－09－14
**基金项目**：内蒙古自然科学基金资助项目（2011MS0112）
**作者简介**：陈利国（1976 年生），男，副教授；E-mail：chenliguo66@163.com

凸空间的（弱）中点局部 $k$ – 一致凸性和（弱）中点局部 $k$ – 一致光滑性这一对对偶概念，它们既是 Banach 空间相应概念的严格推广[9-10]，又是局部凸空间（弱）中点局部一致凸性和（弱）中点局部一致光滑性的自然推广。然后，讨论它们与其它 $k$ – 凸性（$k$ – 光滑性）之间的重要关系，推广了 Banach 空间的某些结果。

下面是本文用到的一些预备知识和记号，以方便读者能够更快地了解本文。

设 $X$ 是一个实线性空间，$P$ 是 $X$ 上的一可分离的半范数族（即满足 $\bigcap\limits_{p\in P} p^{-1}(0) = \{0\}$，其中 $p^{-1}(0) = \{x \in X : p(x) = 0\}$）（下同），令 $T_P$ 是由半范数族 $P$ 生成的 $X$ 上的局部凸拓扑，则（$X$，$T_P$）是局部凸分离空间。下文中，凡提到局部凸分离空间（$X$，$T_P$）时，总意味着 $T_P$ 是由 $X$ 上的某一族分离的半范数 $P$ 生成的。

对任意 $p \in P$，$(X,p)$ 为一个半范空间，用 $(X,p)'$ 表示 $(X,p)$ 上连续线性泛函全体作成的对偶空间，其中范数定义为 $\|f\|'_p \overset{\Delta}{=} \sup\limits_{p(x)\leqslant 1} |f(x)|$，$\forall f \in (X,p)'$，则 $(X,p)'$ 按范数 $\|\cdot\|'_p$ 是一个 Banach 空间[11]。记 $X' \overset{\Delta}{=} (X,T_P)'$ 表示 $(X,T_P)$ 的拓扑对偶空间，对任意 $p \in P$，记 $X'(p) \overset{\Delta}{=} \{f \in X' : \sup\limits_{p(x)\leqslant 1} |f(x)| < +\infty\}$，则 $X'(p)$ 是 $X'$ 的一个线性子空间，且在文献[5]中已经证明了对任意 $p \in P$，有 $(X,p)' = X'(p)$。

对任意一正数族 $\{C_p > 0 : p \in P\}$，记 $B\{C_p\} \overset{\Delta}{=} \{x \in X : p(x) \leqslant C_p, p \in P\}$，易知 $B\{C_p\}$ 是 $(X,T_P)$ 中的绝对凸有界闭集。对于每一个 $B\{C_p\}$，定义 $X'$ 上的半范数 $p^*_{B\{C_p\}}$ 为 $p^*_{B\{C_p\}}(f) \overset{\Delta}{=} \sup\limits_{x\in B\{C_p\}} |f(x)|$ $\forall f \in X'$，并称 $p^*_{B\{C_p\}}$ 是由 $B\{C_p\}$ 决定的 $X'$ 上的半范数。记 $P^*$ 是形如 $p^*_{B\{C_p\}}$ 的全体半范数构成半范数族，$P^*$ 生成 $X'$ 上的局部凸拓扑，记为 $T_{P^*}$。这样又得到 $X'$ 上的半范数族 $P^*$ 和局部凸空间 $(X',T_{P^*})$。类似可以得到 $P^{**}$ 和 $(X'',T_{P^{**}})$ 等概念。如同赋范空间用偶对（$X$，$\|\cdot\|$）表示一样，我们对由一族半范数 $P$ 在其上生成局部凸拓扑 $T_P$ 的空间 $X$，也用偶对（$X$，$P$）来表示。

下面给出本文中常用的几个符号：

对任意 $p \in P$，令 $U_p(X) \overset{\Delta}{=} \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$，$S_p(X) = \{x \in X : p(x) = 1\}$，即 $U_p(X)$ 和 $S_p(X)$ 分别表示半范空间 $(X,p)$ 中的单位球和单位球面；

记 $S(X'(p)) \overset{\Delta}{=} \{f \in X' : \|f\|'_p = \sup\limits_{p(x)\leqslant 1} |f(x)| = 1\}$，$U(X'(p)) \overset{\Delta}{=} \{f \in X' : \|f\|'_p = \sup\limits_{p(x)\leqslant 1} |f(x)| \leqslant 1\}$；对任意 $p \in P, x \in S_p(X)$，令 $\sum_p(x) \overset{\Delta}{=} \{f \in X'(p) : \|f\|'_p = 1 \text{ 且 } f(x) = 1\}$，由 Hahn – Banach 定理容易知道 $\sum_p(x)$ 是非空的；（类似可以给出 $S_{p^*}(X')$ 和 $U_{p^*}(X')$；$S(X''(p^*))$ 和 $U(X''(p^*))$；$\sum_{p^*}(f)$ 等）。

对任意的 $p \in P$，$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1} \in S_p(X)$，记

$$A_p(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}) = \sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix} : f_1,f_2,\cdots,f_k \in S(X'(p))\right\}$$

本文所用到的其它有关概念和记号，请参见文献［5，7，11］。

## 1　相关概念

**定义 1**[5]　设 $B$ 是 $(X,T_P)$ 中形如 $B\{C_p\}$ 的绝对凸有界闭集，$p \in P$，若 $C_p = 1$，则称 $B$ 是 $(X,T_P)$ 中的 $p$ – 正规集。（容易知道若 $B$ 是 $p$ – 正规集，则 $B \subset U_p(X)$）。

**定义 2**[6]　称偶对 $(X,P)$ 为 $k$ – 强凸（$k$ – 非常凸）的，若对任意 $p \in P, x \in S_p(X)$，$f \in \sum_p(x)$，以及 $T_P$ 有界的序列 $\{x_n^{(1)}\}$，$\{x_n^{(2)}\}$，$\cdots$，$\{x_n^{(k)}\} \subset S_p(X)$，且 $\lim\limits_n f(x_n^{(j)}) = 1 (j = 1,2,\cdots,k)$ 时，有 $\lim\limits_n A_p(x,x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(k)}) = 0$。（对任意 $f_1,f_2,\cdots,f_k \in S(X'(p))$，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_n^{(1)}) & \cdots & f_1(x_n^{(k)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x) & f_k(x_n^{(1)}) & \cdots & f_k(x_n^{(k)}) \end{vmatrix} \to 0 (n \to \infty)\Bigg)$$

**定义 3**[6]　称偶对 $(X,P)$ 为 $k$ – 严格凸的，若对任意 $p \in P$，当 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1} \in X$ 且满足 $p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_{k+1}) = p(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}) = 1$ 时，有 $A_p(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}) = 0$。

**定义 4**[6]　称偶对 $(X,P)$ 为 $k$ – 光滑的，若对任意 $p \in P, x \in S_p(X)$，以及 $X$ 中含有 $x$ 的任一 $p$ – 正规集 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范数 $p^*_B$，当 $\{f_1,f_2,$

$\cdots,f_{k+1}\}\subset\sum_p(x)$ 时，有 $A_{p_B^*}(f_1,f_2,\cdots,f_{k+1})=0$。

**定义 5** [6] 称偶对 $(X,P)$ 为 $k$－强光滑（$k$－非常光滑）的，若对任意的 $p\in P,x\in S_p(X)$，以及 $X$ 中含有 $x$ 的任一 $p$－正规集 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范数 $p_B^*$，当 $\{f_n^{(1)}\},\{f_n^{(2)})\},\cdots,\{f_n^{(k+1)}\}\subset S(X'(p))$，且满足 $\lim\limits_n f_n^{(j)}(x)=1$，$(j=1,2,\cdots,k+1)$ 时，有 $\lim\limits_n A_{p_B^*}(f_n^{(1)},f_n^{(2)},\cdots,f_n^{(k+1)})=0$。

（对任意 $F_1,F_2,\cdots,F_k\in S(X''(p_B^*))$，有

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ F_1(f_n^{(1)}) & F_1(f_n^{(2)}) & \cdots & F_1(f_n^{(k+1)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ F_k(f_n^{(1)}) & F_k(f_n^{(2)}) & \cdots & F_k(f_n^{(k+1)})\end{vmatrix}\to 0(n\to\infty))$$

**定义 6** 称偶对 $(X,P)$ 为（弱）中点局部 $k$－一致凸的，若对任意 $p\in P,x\in S_p(X)$，$T_P$ 有界序列 $\{x_n^{(1)}\}$，$\{x_n^{(2)}\}$，$\cdots$，$\{x_n^{(k+1)}\}\subset S_p(X)$，当 $\lim\limits_n p(x-\dfrac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1})=0$ 时，有 $\lim\limits_n A_p(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(k+1)})=0$。（对任意 $f_1,f_2,\cdots,f_k\in S(X'(p))$，有

$$\left(\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_n^{(1)}) & f_1(x_n^{(2)}) & \cdots & f_1(x_n^{(k+1)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_k(x_n^{(1)}) & f_k(x_n^{(2)}) & \cdots & f_k(x_n^{(k+1)})\end{vmatrix}\to 0(n\to\infty)\right)$$

显然，中点局部 $k$－一致凸性蕴含着弱中点局部 $k$－一致凸性。

**注 1** $k=1$ 时定义 6 就是文献［7］中（弱）中点局部一致凸性。

**注 2** 定义 6 中“$\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\},\cdots,\{x_n^{(k+1)}\}\subset S_p(X)$”可换为“$\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\},\cdots,\{x_n^{(k+1)}\}\subset U_p(X)$”，证明类似与文献［6］中注 2.1 和文献［7］注 2 的证明。

**定义 7** 称偶对 $(X,P)$ 为（弱）中点局部 $k$－一致光滑的，若对任意的 $p\in P,x\in S_p(X)$，以及 $X$ 中含 $x$ 的任一 $p$－正规集 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范数 $p_B^*$，$f\in\sum_p(x)$，$\{f_n^{(1)}\},\{f_n^{(2)}\},\cdots,\{f_n^{(k+1)}\}\subset S(X'(p))$，且满足 $\lim\limits_n p_B^*(f-\dfrac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+f_n^{(k+1)}}{k+1})=0$ 时，有 $\lim\limits_n A_{p_B^*}(f_n^{(1)},f_n^{(2)},\cdots,f_n^{(k+1)})=0$。

（对任意 $F_1,F_2,\cdots,F_k\in S(X''(p_B^*))$，有

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ F_1(f_n^{(1)}) & F_1(f_n^{(2)}) & \cdots & F_1(f_n^{(k+1)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ F_k(f_n^{(1)}) & F_k(f_n^{(2)}) & \cdots & F_k(f_n^{(k+1)})\end{vmatrix}\to 0(n\to\infty))$$

显然，中点局部 $k$－一致光滑性蕴含着弱中点局部 $k$－一致光滑性。

**注 3** $k=1$ 时定义 7 就是文献［8］中（弱）中点局部一致光滑性。

**注 4** 若将 $P$ 视为一范数 $\|\cdot\|$ 组成的单元素集，即 $(X,P)=(X,\|\cdot\|)$，定义 6 和定义 7 与文献［9－10］中 Banach 空间相应定义完全一致，也说明了本文给出的定义是 Banach 空间相应定义的严格推广。

## 2 (弱)中点局部 $k$－一致凸性和(弱)中点局部 $k$－一致光滑性的对偶性质

**定理 1** （i）若偶对 $(X',P^*)$ 是中点局部 $k$－一致凸的，则偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$－一致光滑的。

（ii）若偶对 $(X',P^*)$ 是弱中点局部 $k$－一致凸的，则偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$－一致光滑的。

**证明** 只证（i），（ii）类似。

对任意 $p\in P,x\in S_p(X)$，及 $X$ 中含 $x$ 的任一 $p$－正规集 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范 $p_B^*$，$f\in\sum_p(x)$，$\{f_n^{(1)}\},\{f_n^{(2)}\},\cdots,\{f_n^{(k+1)}\}\subset S(X'(p))$，且

$$\lim_n p_B^*(f-\frac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+f_n^{(k+1)}}{k+1})=0$$

类似与文献［7］中定理 3.4 可以得到 $\{f_n^{(j)}\}\subset U_{p_B^*}(X')$ $(j=1,2,\cdots,k+1)$，且 $\{f_n^{(1)}\},\{f_n^{(2)}\},\cdots,\{f_n^{(k+1)}\}$ 是 $T_{P^*}$ 有界序列。

另一方面，由文献［12］引理 2.1 可知 $f\in S_{p_B^*}(X')$。再由偶对 $(X',P^*)$ 是中点局部 $k$－一致凸的。故 $\lim\limits_n A_{p_B^*}(f_n^{(1)},f_n^{(2)},\cdots,f_n^{(k+1)})=0$，即偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$－一致光滑的。

**定理 2** （i）若偶对 $(X',P^*)$ 是中点局部 $k$－一致光滑的，则偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$ 一致凸的。

（ii）若偶对 $(X',P^*)$ 是弱中点局部 $k$－一致光滑的，则偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$－一致凸的。

**证明** 只证（i），（ii）类似。

对任意 $p\in P,x\in S_p(X)$，以及 $T_P$ 有界序列

$\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\},\cdots,\{x_n^{(k+1)}\}\subset S_p(X)$，且 $\lim\limits_n p(x-\dfrac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1})=0$。令

$$B\overset{\Delta}{=}\{z\in X:p(z)\leqslant 1,q(z)\leqslant\sup_n q(x_n^{(1)})+\cdots+\sup_n q(x_n^{(k+1)})+1,\quad\forall q\in P\setminus\{p\}\quad\}$$

则 $B$ 是 $X$ 中的 $p$ - 正规集且含有 $x$ 和 $\{x_n^{(j)}\}(j=1,2,\cdots,k+1)$。

令 $p_B^*$ 是由 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范数，则由文献［12］引理 2.1 可知 $f\in S_{p_B^*}(X')$。令

$$B^*\overset{\Delta}{=}\{g\in X':p_B^*(g)\leqslant 1,p^*(g)\leqslant\sup_{h\in U(X'(p))}p^*(h)+1\quad\forall p^*\in P^*\setminus\{p_B^*\}\quad\}$$

则易知 $B^*$ 是 $X'$ 中的 $p_B^*$ - 正规集且含有 $f$，且 $U(X'(p))\subset B^*\subset U_{p_B^*}(X')$。

令 $p_{B^*}^{**}(F)\overset{\Delta}{=}\sup\limits_{g\in B^*}|F(g)|\quad\forall F\in X''$，则 $p_{B^*}^{**}$ 是由 $B^*$ 决定的 $X''$ 上的半范数。

设 $\hat{x}$ 是 $x$ 在 $X''$ 中的自然嵌入像；$\{\hat{x}_n^{(j)}\}$ 是 $\{x_n^{(j)}\}$ 在 $X''$ 中的自然嵌入像 $(j=1,2,\cdots,k+1)$，则

$$\|\hat{x}\|'_{p_B^*}=\sup_{p_B^*(g)\leqslant 1}|\hat{x}(g)|=\sup_{\sup\limits_{y\in B}|g(y)|\leqslant 1}|g(x)|\leqslant 1;$$

$$\|\hat{x}\|'_{p_B^*}=\sup_{p_B^*(g)\leqslant 1}|\hat{x}(g)|\geqslant\sup_{\|g\|_p\leqslant 1}|g(x)|=p(x)=1$$

故 $\|\hat{x}\|'_{p_B^*}=1$。同理可得 $\{\hat{x}_n^{(j)}\}\subset S(X''(p_B^*))(j=1,2,\cdots,k+1)$。

另一方面，由于 $\hat{x}(f)=f(x)=1$，所以 $\hat{x}\in\sum_{p_B^*}(f)$。由于

$$0\leqslant p_{B^*}^{**}\left(\hat{x}-\frac{\hat{x}_n^{(1)}+\hat{x}_n^{(2)}+\cdots+\hat{x}_n^{(k+1)}}{k+1}\right)=\sup_{g\in B^*}\left|\left(\hat{x}-\frac{\hat{x}_n^{(1)}+\hat{x}_n^{(2)}+\cdots+\hat{x}_n^{(k+1)}}{k+1}\right)(g)\right|=\sup_{g\in B^*}\left|g\left(x-\frac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1}\right)\right|\leqslant(\sup_{g\in B^*}\|g\|'_p)\cdot p\left(x-\frac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1}\right)$$

在文献［7］中已证明了 $\sup\limits_{g\in B^*}\|g\|'_p$ 是有界的，故

$$\lim_n p_{B^*}^{**}\left(\hat{x}-\frac{\hat{x}_n^{(1)}+\hat{x}_n^{(2)}+\cdots+\hat{x}_n^{(k+1)}}{k+1}\right)=0$$

再由偶对 $(X',P^*)$ 是中点局部 $k$ - 一致光滑的，类似与文献［13］中可以证明 $U(X'(p))\subset U(X'''(p_{B^*}^{**}))$（在自然嵌入意义下），故

$$0\leqslant A_p(x_n^{(1)},\cdots,x_n^{(k+1)})\leqslant A_{p_{B^*}^{**}}(\hat{x}_n^{(1)},\cdots,\hat{x}_n^{(k+1)})\to 0(n\to\infty)$$

从而证明了偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$ - 一致凸的。

在凸性和光滑性理论的研究中，相互对偶的概念及其性质的研究占据着重要的地位。因此，合理引进并研究某种凸性（或光滑性）的对偶概念 - 光滑性（或凸性）显得尤为重要。定理 1 和定理 2 说明本文引进的局部凸空间的（弱）中点局部 $k$ - 一致凸性和（弱）中点局部 $k$ - 一致光滑性是一对对偶概念，进而说明引进的概念是合理的。

## 3　(弱)中点局部 $k$ - 一致凸性和(弱)中点局部 $k$ - 一致光滑性与其它 $k$ - 凸性和 $k$ - 光滑性之间的关系

下面结论是 Banach 空间相应结果的推广

**定理 3**　若偶对 $(X,P)$ 是 $k$ - 强凸的，则偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$ - 一致凸的。

**证明**　对任意的 $p\in P,x\in S_p(X)$，以及 $T_P$ 有界序列 $\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\},\cdots,\{x_n^{(k+1)}\}\subset S_p(X)$，当 $\lim\limits_n p\left(x-\dfrac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1}\right)=0$ 时，取 $f\in\sum_p(x)$，因为

$$0\leqslant\left|f\left(x-\frac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1}\right)\right|\leqslant p\left(x-\frac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1}\right)\to 0\ (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_n\sum\limits_{j=1}^{k+1}f(x_n^{(j)})=k+1$，又因为对于每一个 $j(1\leqslant j\leqslant k+1)$，$|f(x_n^{(j)})|\leqslant\|f\|'_p\cdot p(x_n^{(j)})=1$，因而对每一个 $j(1\leqslant j\leqslant k+1)$，

$$0\leqslant 1-f(x_n^{(j)})\leqslant 1-f(x_n^{(j)})+k-\sum_{i=1}^{j-1}f(x_n^{(j)})-\sum_{i=j+1}^{k+1}f(x_n^{(i)})=(k+1)-\sum_{i=1}^{k+1}f(x_n^{(i)})$$

于是有 $\lim\limits_n f(x_n^{(j)})=1,(j=1,2,\cdots,k+1)$。又因为偶对 $(X,P)$ 是 $k$ - 强凸的，故

$$\lim_n A_p(x,x_n^{(1)},\cdots,x_n^{(j-1)},x_n^{(j+1)},\cdots,x_n^{(k+1)})=0$$
$$(j=1,2,\cdots,k+1)$$

参考文献［10］中引理 2.1 和定理 2.1 的证明，可得到 $\lim\limits_n A_p(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(k+1)})=0$，即偶对 $(X,P)$ 为中点局部 $k$ - 一致凸的。

类似可以证明：

**定理 4**　若偶对 $(X,P)$ 是 $k$ - 非常凸的，则偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$ - 一致凸的。

**定理 5**　若偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$ - 一致凸的，则偶对 $(X,P)$ 是 $k$ - 严格凸的。

**证明**　对任意 $p\in P$，当 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in X$，

且满足

$$p(x_1)=p(x_2)=\cdots=p(x_{k+1})=p\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)=1$$

令 $x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}$，则 $x\in S_p(X)$。

对 $\forall n\in\mathbf{N},j=1,2,\cdots,k+1$，令 $x_n^{(j)}=x_j$，显然 $\{x_n^{(j)}\}(\subset S_p(X))$ 是 $T_p$ 有界序列（$j=1,2,\cdots,k+1$）。而且 $p\left(x-\dfrac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\cdots+x_n^{(k+1)}}{k+1}\right)=0$，又由偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$ –一致凸的，所以

对任意的 $f_1,f_2,\cdots,f_k\in S(X'(p))$，有

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\f_1(x_1)&f_1(x_2)&\cdots&f_1(x_{k+1})\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\f_k(x_1)&f_k(x_2)&\cdots&f_k(x_{k+1})\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\f_1(x_n^{(1)})&f_1(x_n^{(2)})&\cdots&f_1(x_n^{(k+1)})\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\f_k(x_n^{(1)})&f_k(x_n^{(2)})&\cdots&f_k(x_n^{(k+1)})\end{vmatrix}\to0(n\to\infty)$$

即 $A_p(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})=0$，这也就证明了偶对 $(X,P)$ 是 $k$ –严格凸的。

**定理6** 若偶对 $(X,P)$ 是 $k$ –强光滑的，则偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$ ––一致光滑的。

**证明** 对任意的 $p\in P,x\in S_p(X)$，以及 $X$ 中含 $x$ 的任一 $p$ –正规集 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范数 $p_B^*$，$f\in\sum_p(x)$，$\{f_n^{(1)}\}$，$\{f_n^{(2)}\},\cdots$，$\{f_n^{(k+1)}\}\subset S(X'(p))$，且 $\lim\limits_n p_B^*\left(f-\dfrac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+f_n^{(k+1)}}{k+1}\right)=0$。因为

$$0\leqslant\left|\left(f-\frac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+\cdots+f_n^{(k+1)}}{k+1}\right)(x)\right|\leqslant\sup_{y\in B}\left|\left(f-\frac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+\cdots+f_n^{(k+1)}}{k+1}\right)(y)\right|=p_B^*\left(f-\frac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+\cdots+f_n^{k+1}}{k+1}\right)$$

所以 $\lim\limits_n\sum\limits_{i=1}^{k+1}f_n^{(i)}(x)=k+1$。由定理3的证明可知 $\lim\limits_n f_n^{(j)}(x)=1\ (j=1,2,\cdots,k+1)$。

又因为偶对 $(X,P)$ 是强光滑的，故 $\lim\limits_n A_{p_B^*}(f_n^{(1)},f_n^{(2)},\cdots,f_n^{(k+1)})=0$，即偶对 $(X,P)$ 是中点局部 $k$ ––一致光滑的。

类似可以证明：

**定理7** 若偶对 $(X,P)$ 是 $k$ –非常光滑的，则偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$ ––一致光滑的。

**定理8** 若偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$ ––一致光滑的，则偶对 $(X,P)$ 是 $k$ –光滑的。

**证明** 对任意 $p\in P,x\in S_p(X)$，以及 $X$ 中含有 $x$ 的任一 $p$ –正规集 $B$ 决定的 $X'$ 上的半范数 $p_B^*$，且 $\{f_1,f_2,\cdots,f_{k+1}\}\subset\sum_p(x)$，令 $f=\dfrac{f_1+f_2+\cdots+f_{k+1}}{k+1}$，则 $f\in\sum_p(x)$。令，对任意 $n\in\mathbf{N}$，$f_n^{(i)}=f_i$，显然 $f_n^{(i)}\in S(X'(p))(i=1,2,\cdots,k+1)$，显然有 $\lim\limits_n p_B^*\left(f-\dfrac{f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+f_n^{(k+1)}}{k+1}\right)=0$。由条件偶对 $(X,P)$ 是弱中点局部 $k$ ––一致光滑的，有 $A_{p_B^*}(f_1,f_2,\cdots,f_{k+1})=0$。即偶对 $(X,P)$ 是 $k$ –光滑的。

**参考文献：**


[1] DIMINNIE C R, WHITE A G. Strict convexity in topological vector spaces [J]. Math Japonica, 1977, 22(1): 49–56.

[2] DIMINNIE C R, WHITE A G. Strict convexity conditions for seminorms [J]. Math Japonica, 1980, 24(5): 489–495.

[3] 国起，吴从炘. 局部凸空间的严格凸性与光滑性[J]. 东北数学, 1989, 5(4): 465–472.

[4] 吴从炘，国起. 局部凸空间的一致凸性[J]. 数学年刊, 1990, 11A(3): 351–354.

[5] 林敏，刘德，罗成，等. 对局部凸空间凸性的探讨[J]. 内蒙古大学学报：自然科学版, 2003, 34(5): 485–489.

[6] 郝建军，刘德. 局部凸空间中若干种 $k$–凸性 $k$–光滑性的研究[J]. 内蒙古大学学报：自然科学版, 2010, 41(1): 34–40.

[7] 陈利国，罗成. 关于局部凸空间的中点局部一致凸性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(6): 749–755.

[8] 陈利国，罗成. 局部凸空间的几种光滑性及其等价条件[J]. 集宁师专学报, 2009, 31(4): 1–5.

[9] 冼军，黎永锦. 若干 $k$–凸性的等价条件[J]. 中山大学学报：自然科学版, 2003, 42(1): 12–15.

[10] 陈利国，罗成. $k$–非常凸、$k$–非常光滑与（弱）中点局部 $k$–一致光滑空间[J]. 内蒙古大学学报：自然科学版, 2007, 38(5): 494–497.

[11] WILANSKY A. Modern methods in topological vector spaces [M]. New York: Mc GrnHill, 1978.

[12] 陈利国，罗成. 关于局部凸空间的性质（$WM$）与性质（$WM$）$^*$[J]. 内蒙古大学学报：自然科学版, 2008, 39(5): 499–502.

[13] 陈利国，罗成. 局部凸空间的 $k$––一致极凸性与 $k$––一致极光滑性[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(20): 225–232.